2014年　東大理系数学　第4問

(2)

・$x_{n+1} = (1-p)x_n + (1-x_n)(1-e^{-qx_n})$
という漸化式が与えられている

・$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を示す

$\Rightarrow$ $x_{n+1} < r\, x_n$ (但し $|r|<1$)
の形を示せばよい。

$x_{n+1} = (1-p)x_n + (1-x_n)(1-e^{-qx_n})$ において、

問題文中の $1+x \leqq e^x$ を使用

$1+x \leqq e^x$ より
$1-qx_n \leqq e^{-qx_n} \Leftrightarrow 1-e^{-qx_n} \leqq qx_n$ を利用すると

$x_{n+1} \leqq (1-p)x_n + (1-x_n)\times qx_n$

$= (1-p+q-qx_n)x_n$

カット

$< (1-p+q)x_n$

0より大きいので
1より小さいことを示したい。

ここで、$1-p>0$ かつ $q>0$ より $1-p+q>0$
$1-(1-p+q) = p-q>0$ より $1-p+q<1$
なので、
1と $1-p+q$ の大小比較。

$0<1-p+q<1$ である。　示せた！
あとはいつもの流れ。

$x_{n+1} < (1-p+q)x_n$ より

$x_n < (1-p+q)x_{n-1}$
$< (1-p+q)^2 x_{n-2}$
$\vdots$
$< (1-p+q)^n x_0$

$0<x_n<(1-p+q)^n x_0$ において、

$\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^n x_0 = 0$ であるから

ハサミウチの原理より、$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ //

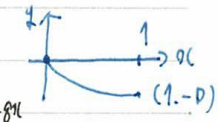
(3)

$c=f(c)$ から、$g(x)=f(x)-x$ とおき、
$g(x)=0$ の解を探すことを発想。
アルアルだよ。

$0<c<1$ の条件から、中間値の定理を発想。

$g(x)=f(x)-x$ とおく。つまり
$g(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx}) - x$
$= -px + (1-x)(1-e^{-qx})$

$g(0) = 0 + 1\times(1-1) = 0$
$g(1) = -p + 0\times(1-e^{-q}) = -p < 0$
より、これだけでは中間値の定理が使えない。



$g'(x) = -p + (-1)\times(1-e^{-qx}) + (1-x)qe^{-qx}$
$= -p-1+e^{-qx}+q(1-x)e^{-qx}$

こうなる可能性が高まるので、

$g'(x)$ の様子も不明確

$g''(x) = -qe^{-qx} + q\{-1\times e^{-qx} + (1-x)(-qe^{-qx})\}$
$= qe^{-qx}(-1-1-q+qx)$
$= qe^{-qx}\{q(x-1)-2\} < 0$ ($\because x-1<0$)

符号が決定。

$g''(x)<0$ なので、$g'(x)$ は単調減少で、
$g'(0) = q-p>0$　　$g'(1) = -p-1+e^{-q}<0$
より、$g'(x)=0$ は $0<x<1$ にただ1つの解をもつ。
連続であるので。　(中間値の定理)

その解を α とすると、増減表は下のようになる。

x	0		α		1
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗		↘	$-p$

よって、$g(x)$ の連続性から、$0<x<1$ に $g(x)=0$ となる解が1つ存在する。

よって $c=f(c)$ かつ $0<c<1$ となる実数 c が存在する。